PARAGRAAF 12.1 : GONIO VERGELIJKINGEN EN HERLEIDINGEN

LES 1 GONIO VERGELIJKINGEN OPLOSSEN MET HERLEIDREGELS

OMSCHRIJFREGELS VOOR SIN(X) EN COS(X)

Er zijn een aantal omschrijfregels die je soms nodig hebt om goniovergelijkingen op te lossen:

(1) $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$

(2) $-sin(x) = sin\,(x + \pi)$

(3) $-cos(x) = cos\,(x + \pi)$

(4) $sin(x) = cos(x - ½\pi)$ { ½π naar rechts }

(5) $cos(x) = sin(x + ½\pi)$ { ½π naar links }

(6) $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$

REGELS OPLOSSEN GONIO-VERGELIJKING

(1) DE STANDAARDTABEL

rad	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Als de waarde negatief is, tel je er π bij op. Dus bijv. $sin(1\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}$

(2) DE GONIO VERGELIJKINGS REGELS :

$sin(A) = sin(B)$

$A = B + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; A = \pi - B + k \cdot 2\pi$

$cos(A) = cos(B)$

$A = B + k \cdot 2\pi \;\; v \;\; A = -B + k \cdot 2\pi$

(3) HET STAPPENPLAN

Stappenplan Gonio-vergelijking oplossen

(1) Zorg dat er links geen getal voor de sin of cos staat
(2) Zet de rechtse waarde om in een sin/cos-waarde m.b.v. de standaardtabel
(3) Gebruik bovenstaande regel om de vergelijking verder op te lossen
(4) Schrijf alle oplossingen op die binnen het domein liggen

VOORBEELD 1

Los exact op

a. $sin(x + \pi) = -1$
b. $sin(x) - cos^2(x) = -1$

OPLOSSING 1

a. Methode 1 : Oude manier

(1) $sin(x+\pi) = -1$

(2) $sin(x+\pi) = sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x+\pi = 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \;\; v \;\; x+\pi = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \;\; v \;\; x = -1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$ (zelfde)

$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

Methode 2 : Met nieuwe regels

(1) $sin(x+\pi) = -1$

$-sin(x) = -1$

$sin(x) = 1$

(2) $sin(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi - \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$ (zelfde)

$x = \frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

b. $sin(x) - cos^2(x) = -1$

$sin(x) - (1 - sin^2(x)) = -1$

$sin(x) - 1 + sin^2(x)) = -1$

$sin(x) + sin^2(x) = 0$

$sin(x)[1 + sin(x)] = 0$

$sin(x) = 0 \;\; v \;\; 1 + sin(x) = 0$

(1) $sin(x) = 0 \;\; v \;\; sin(x) = -1$

(2) $sin(x) = \sin(0) \;\; v \;\; sin(x) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right)$

(3) $x = 0 + k\cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi - 0 + k\cdot 2\pi \;\; v$

$x = 1\frac{1}{2}\pi - 0 + k\cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi - 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

$x = 0 + k\cdot 2\pi \;\; v \;\; x = \pi + k\cdot 2\pi \;\; v$

$x = 1\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi \;\; v \;\; x = -\frac{1}{2}\pi + k\cdot 2\pi$

LES 2 VERDUBBELINGSFORMULES EN SOMFORMULES

DEFINITIE VERDUBBELINGSFORMULES

(1) $sin(2x) = 2\,sin(x)\,cos(x)$

(2) $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$

(3) $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$

(4) $cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)$

DEFINITIE SOM- EN VERSCHILFORMULES

(5) $cos(t+u) = cos(t)cos(u) - sin(t)sin(u)$

(6) $cos(t-u) = cos(t)cos(u) + sin(t)sin(u)$

(7) $sin(t+u) = sin(t)cos(u) + sin(u)cos(t)$

(8) $sin(t-u) = sin(t)cos(u) - sin(u)cos(t)$

VOORBEELD 1

a. Herleid $sin(2x)\,cos(x)$ tot $2sin(x) - 2sin^3(x)$

b. Herleid $cos(3x)$ tot $cos(x) - 4sin^2(x)cos(x)$

OPLOSSING 1

a.
$$\begin{aligned} sin(2x)cos(x) &= 2sin(x)cos(x)\cdot cos(x) \\ &= 2sin(x)\cdot cos^2(x) \\ &= 2sin(x)\cdot[\,1 - sin^2(x)\,] \\ &= 2sin(x) - 2sin^3(x) \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} cos(3x) = cos(x+2x) &= cos(x)cos(2x) - sin(x)sin(2x) \\ &= cos(x)\,[1 - 2sin^2(x)] - sin(x)\cdot 2sin(x)cos(x) \\ &= cos(x) - 2\,sin^2(x)cos(x) - 2sin^2(x)cos(x) \\ &= cos(x) - 4\,sin^2(x)cos(x) \end{aligned}$$

PARAGRAAF 12.2 : SYMMETRIE EN PRIMITIVEREN

LES 1 LIJN- EN PUNTSYMMETRIE

DEFINITIE LIJN- EN PUNTSYMMETRIE

- Lijnsymmetrisch = { Trek een lijn waarbij linkerkant en rechterkant gespiegeld zijn}
- Lijnsymmetrisch in $x = a$ $\rightarrow f(a-p) = f(a+p)$

$$VB: \; y = x^2$$

- Puntsymmetrisch = {Draaiing van de grafiek rond het symmetriepunt 180 graden}
- Puntsymmetrisch in (a, b) $\rightarrow f(a-p) + f(a+p) = 2b$

$$VB: \; y = x^3$$

VOORBEELD 1

Gegeven is de formule $y = sin(x)$.

a. Toon aan dat de formule lijnsymmetrisch in $x = \frac{1}{2}\pi$.

b. Toon aan dat de formule $f(x) = sin(x) + 3$ puntsymmetrisch in $(2\pi, 3)$.

OPLOSSING 1

a. Gebruik de somformules :

(1) $sin(x + ½\,\pi)$
$$= sin(x)cos(\tfrac{1}{2}\pi) + sin(\tfrac{1}{2}\pi)cos(x)$$
$$= sin(x) \cdot 0 + 1 \cdot cos(x)$$
$$= cos(x)$$

(2) $cos(x + ½\,\pi)$
$$= sin(x)cos(\tfrac{1}{2}\pi) - sin(\tfrac{1}{2}\pi)cos(x)$$
$$= sin(x) \cdot 0 - 1 \cdot cos(x)$$
$$= cos(x)$$

(3) Aangezien deze gelijk zijn is $y = sin(x)$ lijnsymmetrisch in $x = \frac{1}{2}\pi$.

b. Gebruik de somformules :

(1) $f(2\pi - p) = sin(2\pi - p) + 3 \quad = sin(2\pi)cos(p) - sin(p)cos(2\pi) + 3$

$= 0 \cdot cos(p) - sin(p) \cdot 1 + 3$

$= -sin(p) + 3$

(2) $f(2\pi + p) = sin(2\pi + p) + 3 = sin(2\pi)cos(p) + sin(p)cos(2\pi) + 3$

$= 0 \cdot cos(p) + sin(p) \cdot 1 + 3$

$= sin(p) + 3$

(3) $f(2\pi - p) + f(2\pi + p) = (-sin(p) + 3) + (sin(p) + 3) = 6 = 2 \cdot 3$

Aangezien deze gelijk is aan 2b is de formule puntsymmetrisch in $(2\pi, 3)$.

LES 2 INTEGREREN VAN SIN(X) EN COS(X)

INTEGREREN BIJ GONIOFORMULES

- $f(x) = cos(x) \quad \rightarrow F(x) = sin(x)$
- $f(x) = sin(x) \quad \rightarrow F(x) = -cos(x)$
- Denk ook aan de kettingregel bij primitiveren : $F(x) = F(u) \cdot U \; met \; U = \frac{1}{u'}$

VOORBEELD 1

Integreer

a. $f(x) = cos(5x) + 10$

b. $f(x) = 2\,sin(3x + \frac{1}{2}\pi)$

c. $f(x) = cos^2(x)$

OPLOSSING 1

a. $u = 5x \quad \rightarrow u' = 5 \quad \rightarrow U = 1/5$

$F(x) = \frac{1}{5} sin(5x)$

b. $u = 3x + \frac{1}{2}\pi \quad \rightarrow u' = 3 \quad \rightarrow U = \frac{1}{3}$

$F(x) = -\frac{2}{3} cos(3x + \frac{1}{2}\pi)$

c. $cos(2x) = 2cos^2(x) - 1$

d. $2\,cos^2(x) = cos(2x) + 1$

$cos^2(x) = \frac{1}{2}\,cos(2x) + \frac{1}{2}$

Dus $f(x) = cos^2(x) = \frac{1}{2}\,cos(2x) + \frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{1}{4}\,sin(2x) + \frac{1}{2}x$

PARAGRAAF 12.3 : CIRKELBEWEGINGEN EN TRILLINGEN

LES 1 KROMMEN

DEFINITIE KROMME

Kromme = { figuur waarbij de x en de y coördinaten afhankelijk zijn van een 3e variabele t }

VOORBEELD 1

De eenheidscirkel parametervoorstelling:

$\begin{cases} x = cos(t) \\ y = \ sin(t) \end{cases}$ met t op $[0,2\pi]$.

Op de GR weergeven via :

(1) Mode Func > Par
(2) Window : Tmin/max ; Xmin/max ; Ymin/max
(3) Tstep laten staan op 0,13

DEFINITIE

Cirkelbeweging = { Kromme van de vorm $\begin{cases} x = a + r\ cos(\omega t) \\ y = b + r\ sin(\omega t) \end{cases}$

VOORBEELD 2

$\begin{cases} x = 2 + 4\,cos(2t) \\ y = 1 + 4\,sin(2t) \end{cases}$ met t op $[0, \frac{3}{4}\pi]$.

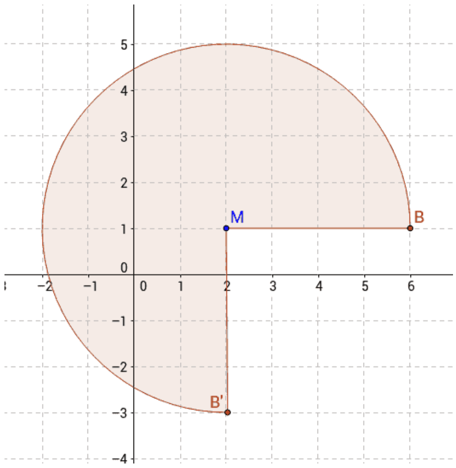
Hierbij is

(1) Middelpunt cirkel = $(2,3)$ (want middelpunt is 2 naar rechts en 3 omhoog gegaan)

(2) r = straal van de cirkel = amplitude = 4

(3) Periode = $\frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ → Trillingstijd (T) = π.

Dit geeft het volgende plaatje :



OPMERKING

- Omdat het domein $[0, \frac{3}{4}\pi]$ is, is de cirkel maar voor ¾ deel getekend (want periode = π)
- Frequentie : F = $\frac{1}{T}$ (in Hertz)

LES 2 HARMONISCHE TRILLING

DEFINITIE

Harmonische trilling = { De beweging van de trilling gaat alleen van boven naar beneden }

Voorbeeld 1

Gegeven is punt Q dat een harmonische trilling uitvoert. De vergelijking is :

$Q(t) = 3\cos\left(30\pi t - \frac{1}{6}\pi\right)$. Hierbij is t in seconden en Q in cm.

a. Bereken de trillingstijd en de frequentie.
b. Bereken de afstand die de trilling aflegt in 2 minuten.

Gegeven is ook punt P die de volgende trilling uitvoert : $P(t) = 3\cos(12\pi t)$.

De samengestelde trilling $u = P + Q$.

c. Bepaal de periode van u (=de gezamenlijke periode).

Oplossing 1

a. $T = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15}$ en F = 15 (Hz)

b. **(1)** Hij trilt 15 keer per seconde.
(2) Per trilling legt hij 4 keer de amplitude af = 4 × 3 = 12cm.
(3) In 2 minuten = 120 seconden zijn dat = 120 × 15 × 12 = 21600 cm.

c. Periode Q = $\frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15} = T_Q$
Periode P = $\frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6} = T_P$
Gezamenlijke periode = $\text{KGV}\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{15}\right\} = \text{KGV}\left\{\frac{5}{30}, \frac{2}{30}\right\} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

PARAGRAAF 12.4 : BEWEGINGSVERGELIJKINGEN

LES 1 BAANSNELHEID EN OMZETTEN KROMME NAAR FUNCTIE.

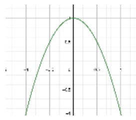
DEFINITIES

(1) Lissajousfiguur = { Kromme met x en y een goniometrische functie }

(2) Afstand (A,B) = $d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

(3) Baansnelheid in punt A = $|\vec{v}(t)| = \sqrt{\left(x`(t)\right)^2 + \left(y`(t)\right)^2}$

(4) Keerpunt = { punt waar de grafiek de andere richting op gaat }
Berekening : $x`(t) = 0 \ en \ y`(t) = 0.$
Vaak mag je het keerpunt gewoon aflezen.



(5) De kromme snijdt een andere lijn of zichzelf in punt P. Je kunt de hoek (in graden) tussen deze twee lijnen op twee manieren berekenen :

(5.1) $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|a||b|}$

(5.2) $rc = \tan(\alpha)$ en $rc = \tan(\beta)$ en $\varphi = \alpha - \beta$ (met rc = $\frac{y`}{x`}$)

VOORBEELD 1 UITGEBREID (BLZ. 173)

De baan van een punt P is gegeven door $\begin{cases} x(t) = sin(2t) \\ y(t) = sin(t) \end{cases}$

met t op [0,2π].

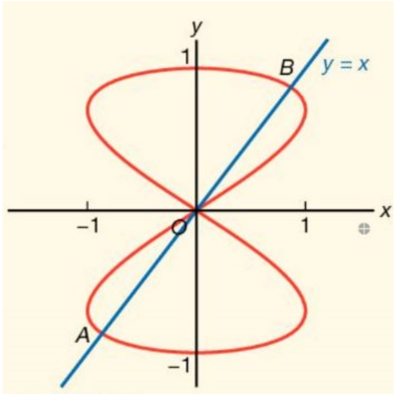
a. Schets de baan van P.

De punten A en B snijden de baan in de lijn y = x.

b. Bereken exact de lengte van AB.
c. Bereken exact de baansnelheid van P in punt B.
d. Bereken de hoek die de baan in B maakt met de lijn y = x.
e. Toon aan dat de kromme te schrijven is als $x^2 = 4y^2 - 4y^4$.

OPLOSSING 1

a. Of GR mode: Function op parametric (en radian)



t	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$1\frac{1}{4}\pi$	$1\frac{1}{2}\pi$	$1\frac{3}{4}\pi$	2π
x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
y	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0

b. $y = x$

$sin(t) = sin\,(2t)$

$t = 2t + k \cdot 2\pi \quad v \quad t = \pi - 2t + k \cdot 2\pi$

$-t = 0 + k \cdot 2\pi \quad v \quad 3t = \pi + k \cdot 2\pi$

$t = k \cdot 2\pi \quad v \quad t = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

$t = 0 \ v \ t = 2\pi \quad v \quad t = \frac{1}{3}\pi \ v \ t = \pi \ v \ t = 1\frac{2}{3}\pi$

$t = 0 \ v \ t = \pi \ v \ t = 2\pi \quad \rightarrow (0,0)$

$x(\frac{1}{3}\pi) = sin(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$x(1\frac{2}{3}\pi) = sin(3\frac{1}{3}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$A = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}\sqrt{3})$ en $B = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$

$AB = d(A,B) = \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{3} - -\frac{1}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+3} = \sqrt{6}$

c. Baansnelheid = $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2}$ $\quad en \quad t_B = \frac{1}{3}\pi$

$x(t) = sin(2t)$
$x`(t) = 2\,cos(2t)$
$x`\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2\,cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = 2 \cdot -\frac{1}{2} = -1$

$y(t) = sin(t)$
$y`(t) = cos(t)$
$y`\left(\frac{1}{3}\pi\right) = cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}$

Dus $\left|\vec{v}\left(\frac{1}{3}\pi\right)\right| = \sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

d. $RC_B = \frac{y`(\frac{1}{3}\pi)}{x'(\frac{1}{3}\pi)} = \frac{\cos(\frac{1}{3}\pi)}{2\cos(\frac{2}{3}\pi)} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\frac{1}{2}$ en $RC_{lijn} = 1$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{2}$ $\qquad \tan(\beta) = 1$ \`

$\alpha = -26{,}565..$ $\qquad \beta = 45$

$\varphi = \alpha - \beta = -26{,}565..-45 \approx 71{,}6$

Of

$\vec{v}\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} x'(\frac{1}{3}\pi) \\ y`\left(\frac{1}{3}\pi\right)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(\frac{2}{3}\pi) \\ \cos(\frac{1}{3}\pi)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{r_{lijn}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos(\varphi) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 1\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|-1+\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{(-1)^2+(\frac{1}{2})^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2\frac{1}{2}}}$

$\varphi \approx 71{,}6$

e. $x^2 = (\sin(2t))^2 = (2\ \sin(t)\cos(t))^2$
$x^2 = 4(\sin(t))^2(\cos(t))^2$
$x^2 = 4(\sin(t))^2\,[1 - (\sin(t))^2] =$
$x^2 = 4(\sin(t))^2 - 4(\sin(t))^4$
$x^2 = 4y^2 - 4y^4.$

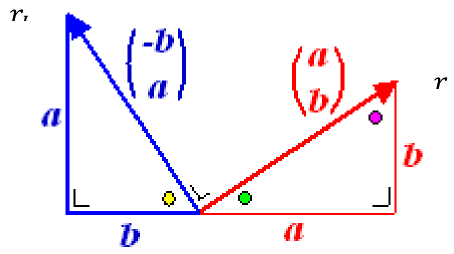
LES 2 FORMULE BIJ BEWEGENDE PUNTEN

DEFINITIES / HERHALING VECTOREN

Als $\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan is

(1) $\vec{r_L} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ (zie plaatje)

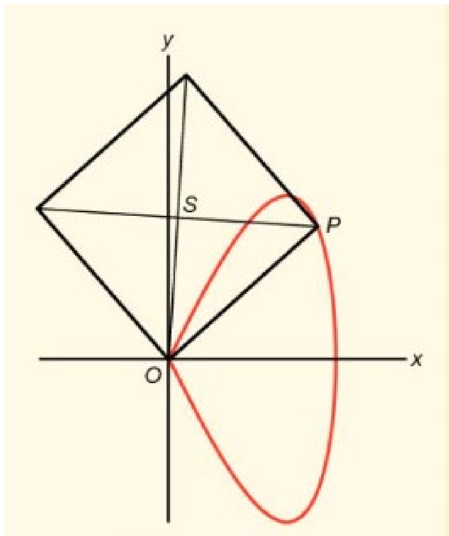
(2) $\vec{r_R} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$



VOORBEELD 1 (BLZ 178)

De baan van een punt P is gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 2sin(t) \\ y(t) = 2sin(2t) \end{cases}$$ met t op $[0,\pi]$.



Het lijnstuk OP is de zijde van een vierkant.
Het punt S is het middelpunt van dit vierkant.
Stel de bewegingsvergelijking van S op.

OPLOSSING 1

$$\vec{s} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{OP_L} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2sin\ (t) \\ 2sin\ (2t) \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2sin\ (2t) \\ 2sin\ (t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sin\ (t) \\ sin\ (2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -sin\ (2t) \\ sin\ (t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} sin(t) - sin\ (2t) \\ sin(2t) + sin\ (t) \end{pmatrix}$$

Dus de bewegingsvergelijkingen van S: $\begin{cases} x(t) = sin(t) - sin\ (2t) \\ y(t) = sin(2t) + sin\ (t) \end{cases}$